黒木玄 **Gen Kuroki**
@genkuroki

mathtod.online/@h_okumura/2198…

journals.ametsoc.org/doi/pdf/1…
でKullback-Leibler情報量が出て来るのは

「これからずっと毎日雨の降る確率は p です」

というタイプの予報に制限した場合だけです。p は毎日同じ。

毎日「今日の降雨確率は p_k です」と毎日異なる予報を出す場合の「スコア」はもはやKL情報量ではなくなります。

必然性がよくわからない数学的条件を課して損失を測る函数の形を決定していた。

社会的な目的を明瞭にしないと損失函数の形は決まらない。社会的目的との関係が不明な数学的条件を課しても意味がないと思う。

2017年06月06日 15:00 · Web · 0 · 2 · Webで開く

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki Tuesday at 7:43pm
journals.ametsoc.org/doi/pdf/1…
の内容の大雑把な紹介

簡単のため毎日降雨確率の予報に点数をつけて評価する話にします。点数は予報の失敗による損失を意味するとし、損失の多い予報ほど成績が悪いということにします。

予報士Aは「今日の降雨確率は p です」と予報したとします。その予報の損失は

(1) 雨が降ったときの損失は $-\log p$,
(2) 雨が降らなかったときの損失は $-\log(1-p)$

です。これが上の論文で扱われている予報の損失の評価の仕方です。

たとえば、「今日の降雨確率は80%です」と予報したとき、雨が降れば損失は $-\log 0.80 \approx 0.22$ になます。もしも降雨確率が100%だと予想していれば、雨が降ったときの損失は $-\log 1 = 0$ ですんだのですが、80%と言ったせいで損失が0.22生じたと評価するわけです。雨が降らなければ損失は $-\log 0.20 \approx 1.6$.

続く

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki Tuesday at 7:50pm
続き

予報が完全に当たって損失が0になるのは、降雨確率を100%と予報して雨が降った場合と、降雨確率を0%と予報して雨が降らなかった場合です。

それ以外の場合には、予報の曖昧さの度合に応じて損失が増えることにしているわけです。

これはこれで合理的な予報の評価の仕方だと思います。

しかし、$-\log x$ という函数を損失の評価に使うことに必然性はありません。

件の論文では適当に条件を仮定して、「いつでも使える便利な函数」として対数函数が使えることを導いています。

しかし、現実の天気予報が予報を外したり、曖昧だったりすることによって生じる損失をどのように評価するかは、純粋に数学的には絶対に決まりません。

$-\log x$ 以外にたくさんの選択肢があるし、全然別の数学的スタイルで損失を評価することも考えられます。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki Tuesday at 8:23pm

続き

仮に予報士はあらゆるデータを総合して降雨確率は f になると確信したとしましょう。そのときその予報士は損失の期待値を最小にするにはどのように降雨確率 p の予報を発表したらよいでしょうか？

その予報士の主観的な損失の期待値は

$$\varphi(p) = -f \log p - (1-f)\log(1-p)$$

です。この函数は $p = f$ で最小になることが、増減表を書くなどの方法によってすぐにわかります(別の証明法もある、KL情報量の話と直接に関係がある)。

だからその予報士は自分が確信した降雨確率をそのまま発表することが合理的だと考えられます。

損失函数 $-\log x$ はこういう良い性質を持っています。

以上では簡単のため雨が降るか降らないかの二択の場合を扱いましたが、一般の m 択のケースでも常に上の良い性質を持つ損失函数の形は $-\log x$ の形になることが件の論文で示されていると考えて構わないと思います。

数学に慣れている人であれば論文を読まなくても自力で適当に計算して以上のような文脈で $-\log x$ を特徴付けることは容易なはずです。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki Tuesday at 8:37pm

「主観的な損失の期待値」云々は私による勝手な解釈。論文はそういう感じに説明してはいないと思う(私が見逃していなければ)。